南京邮电大学2009级硕士研究生 / 南邮三牌楼校区图4号教室

2009.10.13-2009.12: 4-7班(二: 1-4节); 10+15-17+19-20班(四:1-4节)

2009.11.21-2010.01: 22-23班(六: 5-8节)

随机过程 / Stochastic Processes

唐加山

http://math.carleton.ca/∼tangjs

URL Re: http://here.is/tangjs E-mail: jiashant@yahoo.ca

南京邮电大学 理学院 统计系

This document is created by Jiashan TANG with NUPT on November 30, 2009: jiashant@yahoo.ca; http://math.carleton.ca/∼tangjs All right reserved.

教　材　目　录

- Ch 1　概率论基础
- Ch 2　随机过程基本概念
- Ch 3　泊松过程
- Ch 4　马尔科夫链
- Ch 5　连续参数马尔科夫链
- Ch 6　平稳随机过程
- Ch 7　平稳过程的谱分析

教　材：刘次华. 随机过程及其应用(第三版). 高等教育出版社, 2004.7

参考书：(1)樊平毅. 随机过程理论与应用. 清华大学出版社，2005年8月

(2)何声武等译. 随机过程(第一版). 中国统计出版社2005年8月(第5次印刷)

Sheldon M. Ross. Stochastic Processes. John Wiley & Sons, Inc., 1983

This document is created by Jiashan TANG with NUPT on November 30, 2009: jiashant@yahoo.ca; http://math.carleton.ca/∼tangjs All right reserved.

5 纯不连续马尔科夫过程

5.4 布朗运动及其基本性质

布朗运动是一类重要的独立增量过程，可以作为噪声等过程的数学模型，它在随机过程的理论及应用方面起作基本的作用.

(一)定义背景

一个沉浸在液体中的粒子,不停地作不规则地运动，这种在显微镜下才看得清楚的运动就叫做布朗运动。布朗运动作为一种物理现象，首先由英国生物学家Brown于1827年由观察花粉粒在液面上的“无规则运动”而提出的, Einstein 又于1905年对这种“无规则运动”作了物理分析，并首次提出了Brown运动的数学模型。

 All right reserved.

设$X(t)$ 表示布朗运动质点在时刻t 的位移(相对于初始时刻$t=0$ 时$X(0)=0$), 显然$\{X(t), t\geq 0\}$ 是一个随机过程。

(1) 由于微粒的运动是由许多分子碰撞所产生的许多小随机位移的和, 自然可以想象自时刻s 到t 的位移$X(t)-X(s)$ 是由许多几乎独立的小位移的和, 故由中心极限定理, 可假定$X(t)-X(s)$ 为正态分布。

(2) 由液体均匀性，可设$E(X(t)-X(s))=0.$

(3) 设液体处于平衡状态, 因此质点在一段时间区间内的位移的概率分布只依赖于区间的长度, 而与开始观测的时间无关，即对$\forall h>0$，假设$X(t)-X(s)$ 和$X(t+h)-X(s+h)$ 有相同的概率分布也是合理的。

 All right reserved.

(4) 因$X(t_2)-X(t_1), X(t_3)-X(t_2), \cdots, X(t_n)-X(t_{n-1}), (0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n)$ 是对于不相交区间的增量，它们分别是许多几乎独立的小位移的和, 故可假定它们是相互独立的.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

由此, 我们就导出布朗运动的定义.

(二)定义

Definition 78 随机过程$\{X(t), t \ge 0\}$ 若满足下面的条件, 就称为布朗运动

(1) $X(0)=0.$

(2) $\{X(t), t \ge 0\}$ 是齐次独立的增量过程。

(3) 对$\forall t > 0$, $X(t)$ 是正态分布的随机变量，且$EX(t)=0.$

 All right reserved.

(三) 数字特征.

因布朗运动是齐次独立增量过程，且$X(0) = 0$, 因此它的一维分布就可确定其有限维分布. 又因$X(t)$ 为正态分布, 因此当确定了布朗运动的均值函数与方差函数后, 它的分布也就确定了。因此对布朗运动来说, 均值函数和方差函数是它的重要的数字特征.

易见$\mu_X(t) = EX(t) = 0$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

为求方差函数, 先有一个引理.

Lemma 79 设$g(t)(t \geq 0)$ 为t 的实值函数，满足函数方程：$g(t_1 + t_2) = g(t_1) + g(t_2)$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, 且对$\forall t > 0$ 有$g(t) > 0$, 则$g(t) = Ct$, C 为正常数.

 All right reserved.

Proposition 80 $D(X(t)) = \sigma^2 t$, σ 为正数.

Proof. 令$g(t) = DX(t)$, 由$X(t)$ 的增量的齐次独立性可得$g(s+t) = g(s) + g(t)$, 利用上述引理则有$g(t) = Ct$, 令$C = \sigma^2$, 命题得证。

■

This document is created by Jiashan TANG with NUPT on November 30, 2009: jiashant@yahoo.ca; http://math.carleton.ca/∼tangjs All right reserved.

• 由布朗运动的齐次性知, 对$\forall t > s > 0$, $X(t)-X(s)$ 与$X(t-s)=X(t-s)-X(0)$ 同是正态分布, 且分布只与$|t-s|$ 有关, 而与s 无关, 对$s > t > 0$ 的情况可类似讨论，最后，我们有：

$$E(X(t)-X(s))=0,\quad D(X(t)-X(s))=\sigma^2|t-s|.$$

• 若令$|t-s|=1$, 则$D(X(t)-X(s))=E(X(t)-X(s))^2=\sigma^2$. 可见$\sigma^2$ 表示单位时间内$X(\cdot)$ 的均方改变量. σ 的大小与液体的性质有关.

• 若$\sigma=1$, 则对应的布朗运动称为“标准布朗运动”，一般布朗运动可以通过变换化为标准布朗运动，因此我们可以只考虑标准布朗运动。

• 由于$EX(t)=0$, 从而布朗运动的协方差函数就是它的相关函数, 且易证:

$$C(s,t)=R(s,t)=\sigma^2(s\wedge t).$$

 All right reserved.

Definition 81 *(page //104, 推论)(空间齐次性)*

设$\{X(t), t \geq 0\}$ 是随机过程，如果它的有限维分布是空间平移不变的，即

$$P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \cdots, X(t_n) \leq x_n | X(0) = 0)$$
$$= P(X(t_1) \leq x_1 + x, X(t_2) \leq x_2 + x, \cdots, X(t_n) \leq x_n + x | X(0) = x).$$

则称此过程是<u>空间齐次的</u>

 All right reserved.

Theorem 82 *(page //104, 定理5.8)*

Brown 运动$\{B(t)\}$ 具有*Markov* 性。

. . . .

- Brownian 运动$\{B(t)\}$ 在t 时刻的(绝对)概率密度函数为

$$p(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

- Brownian 运动$\{B(t)\}$ 从s 到t 的转移概率密度函数为

$$p(t-s,x,y)=p(s,x,t,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}.$$

 All right reserved.

5.5 布朗运动的最大变量及反正弦律

(一)首中时分布

设$\{B(t), t \geq 0\}$为标准布朗运动，不妨设$B(0) = 0$, 对于$x \in \mathbb{R}$, 定义

$$T_x = \inf\{t > 0, B(t) = x\}.$$

则T_x表示布朗运动首次击中x的时间（称为首中时）；下面求解首中时的分布$P(T_x \leq t)$.

. . . .

情形1：$x > 0$:

考虑事件$P(B(t) \geq x)$, 由全概率公式，

$$P(B(t) \geq x) = P(B(t) \geq x | T_x \leq t)P(T_x \leq t) + P(B(t) \geq x | T_x > t)P(T_x >$$

(等式右边第二项为零，为什么？)

 All right reserved.

若$T_x \le t$, 则$B(t)$ 在$[0,t]$ 中的某个点击中x, 由对称性知道

$$P(B(t) \ge x | T_x \le t) = \frac{1}{2}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} P(T_x \le t) &= 2P(B(t) \ge x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2t}} \mathrm{d}u \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} \mathrm{d}v. \end{aligned}$$

情形2：$x < 0$, 由对称性，可知$P(T_{-x} \le t) = P(T_x \le t)$.

. . . .

对于一般的$x \in \mathbb{R}$, 有

$$P(T_x \le t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|x|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} \mathrm{d}v = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)\right).$$

 All right reserved.

由T_x 的概率分布可以得到如下两个有趣的结论：

- T_x 几乎处处有限，即$P(T_x<\infty)=1$, 这是因为

$$P(T_x<\infty)=\lim_{t\to\infty}P(T_x\le t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=1.$$

- $ET_x=\infty$,

 All right reserved.

$$
\begin{aligned}
ET_x &= \int_0^\infty P(T_x > t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^{\frac{|x|}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left[\int_0^{\frac{|x|}{\sqrt{t}}} \mathrm{d}t \right] e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u \\
&= \frac{2x^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{u^2} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u \\
&\geq \frac{2x^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{1}{u^2} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u \\
&\geq \frac{2x^2 e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

 All right reserved.

(二) 最大值随机变量

定义Brown运动在$[0, t]$ 中达到的最大值为

$$M(t) = \max_{0\le s\le t}\{B(s)\}.$$

则它的分布$(x > 0)$ 为

$$\begin{aligned} P(M(t) \ge x) &= P(T_x \le t) \\ &= 2P(B(t) \ge x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{|x|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

 All right reserved.

(三) 反正弦律

如果有时间τ 使得$B(\tau) = 0$, 则称布朗运动$\{B(\tau)\}$在τ 点经过一次零点.

Theorem 83 设$\{B^x(t)\}$ 为始于x 的布朗运动，则$B^x(t)$ 在$(0,t)$ 中至少有一个零点的概率为$2\left(1-\Phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)\right)$.

Proof. 注意到$B^x(t) = B(t) + x$, 因此如果$x < 0$, 则

$$
\begin{aligned}
P(B^x\text{在}(0,t)\text{中至少有一个零点}) &= P(\max_{0\le s\le t} B^x(s) \ge 0) \\
&= P(\max_{0\le s\le t} B(s) + x \ge 0) \\
&= P(\max_{0\le s\le t} B(s) \ge -x) \\
&= 2P(B(t) \ge -x) \\
&= P(T_x \le t) \\
&= 2\left(1-\Phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

若$x > 0$, 则类似可证。 ■

 All right reserved.

Theorem 84 *(page p//107, 定理5.11)*

$B^y(t)$ 在区间(a,b) 中至少有一个零点的概率为

$$\frac{2}{\pi} arccos \sqrt{\frac{a}{b}},$$

其中$0 < a < b.$

Proof. 设$h(x) = P(B^y$ 在(a,b) 至少有一个零点$|B(a) = x)$,

由Markov 性可知：$h(x) = P(B^x$ 在$(0, b-a)$中至少有一个零点)，因此我们有

$$\begin{aligned}
&P(B^y\text{在}(a,b)\text{中至少有一个零点})\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P(B^y\text{在}(a,b)\text{中至少有一个零点}|B(a) = x)P(B(a) \in dx)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)P(B(a) \in dx)\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \int_0^{\infty} h(x)e^{-\frac{x^2}{2a}}\mathrm{d}x\\
&= \ldots\\
&= \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{a}{b}}
\end{aligned}$$

■

 All right reserved.

Corollary 85 *(page //108, 推论1)*

设$\{B^y(t), t \geq 0\}$ 是布朗运动，则

$$P(B^y(t)\text{在}(a, b)\text{中没有零点}) = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

This document is created by Jiashan TANG with NUPT on November 30, 2009: jiashant@yahoo.ca; http://math.carleton.ca/~tangjs All right reserved.

5.6 布朗运动的几种变化

5.6.1 Brown 桥

设$\{B(t), t \geq 0\}$ 是标准布朗运动，其中$B(0) = 0$, 定义

$$X(t) = B(t) + x + \frac{t}{t_0}(y - x - B(t_0)),$$

则过程$\{X(t), t \geq 0\}$ 的任何轨道都经过$(0, x)$ 和(t_0, y) 这两点，就仿佛两端固定的桥梁，因而称为布朗桥。

通过坐标变换，总可以将上述过程简化为

$$X(t) = B(\frac{t}{t_0}) - \frac{t}{t_0}B(1), \qquad X(0) = 0, X(t_0) = 0.$$

从而我们又下面的定义

 All right reserved.

Definition 86 *(page //108. 定义5.6)*

设$\{B(t), t \geq 0\}$ 是标准布朗运动，令

$$B_{00}(t) = B(t) - tB(1), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

则称随机过程$\{B_{00}(t), 0 \leq t \leq 1\}$ 为*Brown*桥*(Brownian bridge)*

 All right reserved.

5.6.2 有吸收值的Brown运动

Definition 87 *(page//109)*

对于布朗运动关于x 的首中时T_x ($x \in \mathbb{R}$), 令

$$Z(t) = \begin{cases} B(t), & \textit{if } \ t < T_x, \\ x, & \textit{if } \ t \geq T_x. \end{cases}$$

则称$\{Z(t), t \geq 0\}$ 为在x 点被吸收的布朗运动.

....

$Z(t)$ 是个混合型的随机变量，为求其分布$P(Z(t) \leq y)$, 不妨设$x > 0$:

(1) 当$y > x$ 时，$P(Z(t) \leq y) = 1$;
(2) 当$y = x$ 时，$P(Z(t) = x) = P(T_x \leq t) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)\right)$.
(3) 当$y < x$ 时，情况比较复杂，见下页

 All right reserved.

$$
\begin{aligned}
&P(Z(t) \leq y) \\
&= P(B(t) \leq y, \max_{0\leq s\leq t} B(s) < x) \\
&= P(B(t) \leq y) - P(B(t) \leq y, \max_{0\leq s\leq t} B(s) > x) \\
&= P(B(t) \leq y) - P(B(t) \leq y | \max_{0\leq s\leq t} B(s) > x) P(\max_{0\leq s\leq t} B(s) > x)
\end{aligned}
$$

事件$\max_{0\leq s\leq t} B(s) > x$ 等价于$T_x < t$, 即在t 之前击中x, 因此在$T_x < t$ 发生的条件下，要使$B(t) \leq y$, 则在T_x 到t 之间的$t - T_x$ 时间区间内，过程必须减少$x - y$, 根据布朗运动的对称性，减少$x - y$ 与增加$x - y$ 的概率是相同的，因此上式变为

$$
\begin{aligned}
&P(Z(t) \leq y) \\
&= P(B(t) \leq y) - P(B(t) \geq x + x - y | \max_{0\leq s\leq t} B(s) > x) P(\max_{0\leq s\leq t} B \\
&= P(B(t) \leq y) - P(B(t) \geq 2x - y, \max_{0\leq s\leq t} B(s) > x) \\
&= P(B(t) \leq y) - P(B(t) \geq 2x - y) \qquad (\text{因为} y < x) \\
&= P(B(t) \leq y) - P(B(t) \leq y - 2x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{y-2x}^{y} e^{-\frac{u^2}{2t}} \mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

 All right reserved.

5.6.3 在原点反射的Brown运动(page //110)

Definition 88 称由

$$Y(t) = |B(t)|, \qquad t \geq 0.$$

定义的过程为在原点反射的布朗运动.

. . . .

考虑其分布:

(1) 当$y < 0$时，$P(Y(t) \leq y) = 0.$

(2) 当$y \geq 0$时，

$$\begin{aligned} P(Y(t) \leq y) &= P(|B(t)| \leq y) \\ &= P(-y \leq B(t) \leq y) \\ &= 2P(B(t) \leq y) - 1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{u^2}{2t}} \mathrm{d}u - 1 \end{aligned}$$

 All right reserved.

5.6.4 几何Brown运动(page// 110)

Definition 89 由

$$X(t) = e^{B(t)}, \qquad t \ge 0.$$

定义的过程$\{X(t), t \ge 0\}$ 称为几何布朗运动。

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

由于Brown 运动的矩母函数为$Ee^{uB(t)} = e^{\frac{u^2}{2}t}$, 所以几何Brown运动的均值函数与方差函数分别为

$$\begin{aligned} E(x(t)) &= Ee^{B(t)} = e^{\frac{t}{2}} \\ Var(X(t)) &= EX^2(t) - (EX(t))^2 \\ &= Ee^{2B(t)} - e^t \\ &= e^{2t} - e^t \end{aligned}$$

 All right reserved.

说明： 设Y_n 是n 时刻商品的价格,设$\frac{Y_n}{Y_{n-1}} = X_n\ (n \geq 1)$是独立同分布的随机变量，例如取$Y_0 = 1$, 则$Y_n = X_1X_2\cdots X_n$, 故$\ln Y_n = \sum_{i=1}^n \ln X_i$, 则当$n \to \infty$ 时，根据中心极限定理，$\{\ln Y_n n \geq 1\}$ 渐近为布朗运动，于是$\{Y_n, n \geq\}$ 就近似为几何布朗运动

在金融市场中，几何布朗运动经常被用来描述股票的价格等等！(见page// 110 例5.9)

 All right reserved.

5.6.5 有漂移的Brown 运动(page// 111)

Definition 90 设$\{B(t), t \geq 0\}$ 是布朗运动，令$X(t) = B(t) + \mu t$, μ 为常数. 称$\{X(t), t \geq 0\}$ 是带有漂移系数为μ 的漂移布朗运动.

带有漂移布朗运动的背景是一个质点在直线上作非对称的随机游动，它具有一定的趋势，于不规则运动中又有一定的宏观规则运动存在。

 All right reserved.

5.7 向后与向前扩散方程

 All right reserved.

作业及练习

- 作业：//p113, ex 5.2-5.3, 5.6
- 练习：//p168, ex 5.1, 5.4-5.5, 5.7

 All right reserved.